Η Εικασία του Συνεχούς & Η Μέθοδος του Forcing

Ιωάννης Σουλδάτος

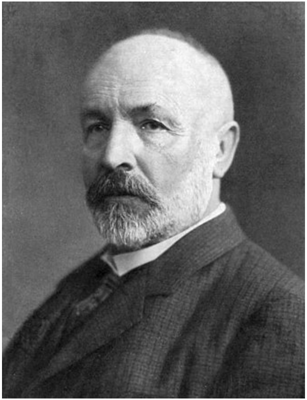
University of Detroit Mercy

17 Μαΐου 2018

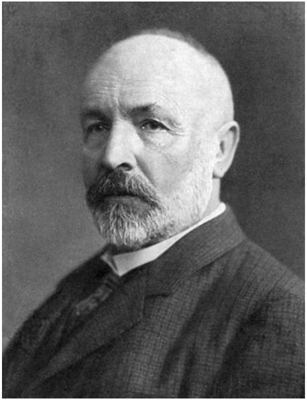
Σημειώσεις:

- Οι φωτογραφίες είναι από τη Wikipedia.
- Μερικοί ορισμοί είναι δικής μου μεταφράσεως.

Cantor (1845 – 1918)

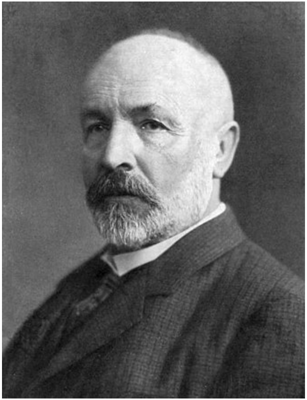


Cantor (1845 – 1918)



- ***Θεώρημα*** [Cantor] Τα άπειρα σύνολα δεν έχουν όλα τον ίδιο πληθικό αριθμό π.χ. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

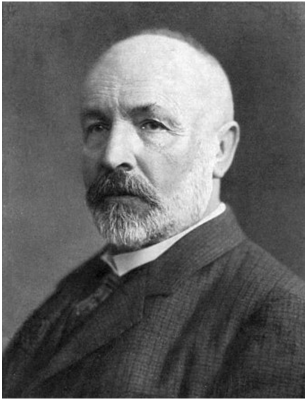
Cantor (1845 – 1918)



- ***Θεώρημα*** [Cantor] Τα άπειρα σύνολα δεν έχουν όλα τον ίδιο πληθικό αριθμό π.χ. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

- Συμβολίζουμε με $\aleph_0$ τον πληθικό αριθμό του $\mathbb{N}$, με $\aleph_1$ τον αμέσως επόμενο πληθικό αριθμό, με $\aleph_2$ τον αμέσως επόμενο κτλ.

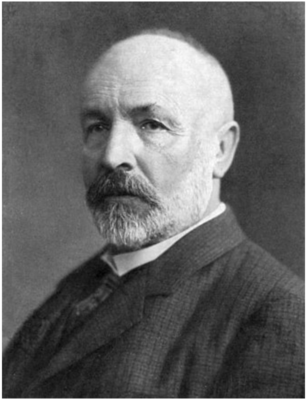
Cantor (1845 – 1918)



- ***Θεώρημα*** [Cantor] Τα άπειρα σύνολα δεν έχουν όλα τον ίδιο πληθικό αριθμό π.χ. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

- Συμβολίζουμε με $\aleph_0$ τον πληθικό αριθμό του $\mathbb{N}$, με $\aleph_1$ τον αμέσως επόμενο πληθικό αριθμό, με $\aleph_2$ τον αμέσως επόμενο κτλ.
- ***Ερώτηση [Cantor]:*** Ισχύει πάντα ότι $|\mathbb{R}| = \aleph_1$;

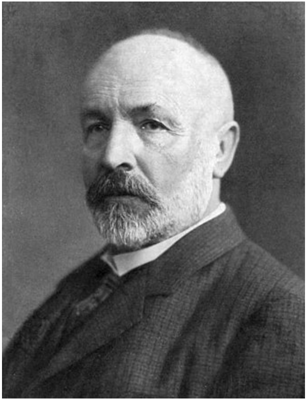
Cantor (1845 – 1918)



- ***Θεώρημα*** [Cantor] Τα άπειρα σύνολα δεν έχουν όλα τον ίδιο πληθικό αριθμό π.χ. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

- Συμβολίζουμε με $\aleph_0$ τον πληθικό αριθμό του $\mathbb{N}$, με $\aleph_1$ τον αμέσως επόμενο πληθικό αριθμό, με $\aleph_2$ τον αμέσως επόμενο κτλ.
- ***Ερώτηση [Cantor]:*** Ισχύει πάντα ότι $|\mathbb{R}| = \aleph_1$;
- Ισοδύναμα, υπάρχει κάποιο σύνολο με πληθικότητα μεγαλύτερη του $\mathbb{N}$ και μικρότερη του $\mathbb{R}$;

Cantor (1845 – 1918)



- ***Θεώρημα*** [Cantor] Τα άπειρα σύνολα δεν έχουν όλα τον ίδιο πληθικό αριθμό π.χ. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

- Συμβολίζουμε με $\aleph_0$ τον πληθικό αριθμό του $\mathbb{N}$, με $\aleph_1$ τον αμέσως επόμενο πληθικό αριθμό, με $\aleph_2$ τον αμέσως επόμενο κτλ.
- ***Ερώτηση [Cantor]:*** Ισχύει πάντα ότι $|\mathbb{R}| = \aleph_1$;
- Ισοδύναμα, υπάρχει κάποιο σύνολο με πληθικότητα μεγαλύτερη του $\mathbb{N}$ και μικρότερη του $\mathbb{R}$;
- Η εικασία ότι $|\mathbb{R}| = \aleph_1$ είναι γνωστή σαν την *Εικασία του Συνεχούς* (Ε.Σ).

Hilbert (1862 – 1943)

Hilbert (1862 – 1943)

- Η Ε.Σ. είναι το πρώτο από τα 23 προβλήματα που πρότεινε ο Hilbert το 1900.

Hilbert (1862 – 1943)

- Η Ε.Σ. είναι το πρώτο από τα 23 προβλήματα που πρότεινε ο Hilbert το 1900.
- Το πρόβλημα παρέμεινε ανοιχτό μέχρι το 1963, εάν και το 1940 ο Kurt Gödel σημείωσε ικανοποιητική πρόοδο.

Gödel (1906 – 1978)

Το 1940 ο Kurt Gödel χρησιμοποιώντας το Σύμπαν των Ορίσιμων Συνόλων απέδειξε το επόμενο θεώρημα.

Gödel (1906 – 1978)

Το 1940 ο Kurt Gödel χρησιμοποιώντας το Σύμπαν των Ορίσιμων Συνόλων απέδειξε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Υπάρχει ένα μοντέλο που ικανοποιεί τα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων συν την Ε.Σ.

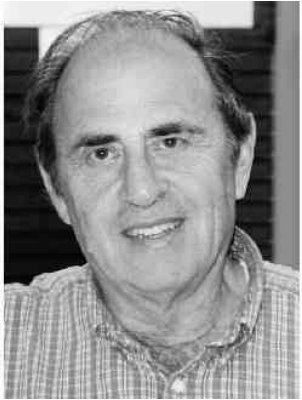
Gödel (1906 – 1978)

Το 1940 ο Kurt Gödel χρησιμοποιώντας το Σύμπαν των Ορίσιμων Συνόλων απέδειξε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Υπάρχει ένα μοντέλο που ικανοποιεί τα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων συν την Ε.Σ.

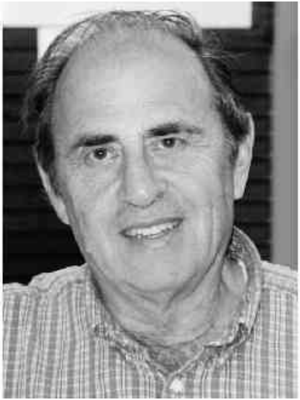
Πόρισμα Τα αξιώματα της Συνολοθεωρίας δεν μπορούν να αποδείξουν την άρνηση της Ε.Σ.

P. Cohen (1934 – 2007)



Το 1963 ο Paul Cohen (ένας Αναλύστας) ανέπτυξε τη μέθοδο του Forcing για να αποδείξει το επόμενο θεώρημα.

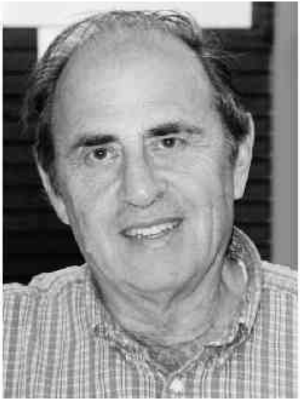
P. Cohen (1934 – 2007)



Το 1963 ο Paul Cohen (ένας Αναλύστας) ανέπτυξε τη μέθοδο του Forcing για να αποδείξει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Υπάρχει ένα μοντέλο που ικανοποιεί τα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων συν την άρνηση της Ε.Σ.

P. Cohen (1934 – 2007)



Το 1963 ο Paul Cohen (ένας Αναλύστας) ανέπτυξε τη μέθοδο του Forcing για να αποδείξει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Υπάρχει ένα μοντέλο που ικανοποιεί τα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων συν την άρνηση της Ε.Σ.

Πόρισμα Τα αξιώματα της Συνολοθεωρίας δεν μπορούν να αποδείξουν την Ε.Σ.

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των Gödel και Cohen, τα αξιώματα της Συνολοθεωρίας δεν μπορούν να αποδείξουν ούτε την Ε.Σ. ούτε την άρνησή της.

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των Gödel και Cohen, τα αξιώματα της Συνολοθεωρίας δεν μπορούν να αποδείξουν ούτε την Ε.Σ. ούτε την άρνησή της.

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η Ε.Σ. είναι ***ανεξάρτητη*** των αξιωμάτων.

Κάποιες Σημειώσεις

- Οι εργασίες του Cohen που έθεσαν τις βάσεις της μεθόδου του Forcing δεν ξεπερνούν τις 10-12 σελίδες.

Κάποιες Σημειώσεις

- Οι εργασίες του Cohen που έθεσαν τις βάσεις της μεθόδου του Forcing δεν ξεπερνούν τις 10-12 σελίδες.
- Παρόλα αυτή η μέθοδος του Forcing είναι εννοιολογικά περίπλοκη. Πολλοί μαθηματικοί δεν μπορούσαν να αποφανθούν εάν η μέθοδος αποτελεί μία «ιδιοφυή λύση» ή «απλές ανοησίες».

Κάποιες Σημειώσεις

- Οι εργασίες του Cohen που έθεσαν τις βάσεις της μεθόδου του Forcing δεν ξεπερνούν τις 10-12 σελίδες.
- Παρόλα αυτή η μέθοδος του Forcing είναι εννοιολογικά περίπλοκη. Πολλοί μαθηματικοί δεν μπορούσαν να αποφανθούν εάν η μέθοδος αποτελεί μία «ιδιοφυή λύση» ή «απλές ανοησίες».
- Ο ίδιος ο Cohen δημοσίευσε λίγες εργασίες μετά το Forcing, αλλά τιμήθηκε με το Fields Medal το 1966.

Κάποιες Σημειώσεις

- Οι εργασίες του Cohen που έθεσαν τις βάσεις της μεθόδου του Forcing δεν ξεπερνούν τις 10-12 σελίδες.
- Παρόλα αυτή η μέθοδος του Forcing είναι εννοιολογικά περίπλοκη. Πολλοί μαθηματικοί δεν μπορούσαν να αποφανθούν εάν η μέθοδος αποτελεί μία «ιδιοφυή λύση» ή «απλές ανοησίες».
- Ο ίδιος ο Cohen δημοσίευσε λίγες εργασίες μετά το Forcing, αλλά τιμήθηκε με το Fields Medal το 1966.
- Μέχρι σήμερα παραμένει ο μοναδικός Μαθηματικός που έχει τιμηθεί με το Fields Medal για τη δουλειά του στο πεδίο της Μαθηματικής Λογικής.

Κάποιες Σημειώσεις

- Οι εργασίες του Cohen που έθεσαν τις βάσεις της μεθόδου του Forcing δεν ξεπερνούν τις 10-12 σελίδες.
- Παρόλα αυτή η μέθοδος του Forcing είναι εννοιολογικά περίπλοκη. Πολλοί μαθηματικοί δεν μπορούσαν να αποφανθούν εάν η μέθοδος αποτελεί μία «ιδιοφυή λύση» ή «απλές ανοησίες».
- Ο ίδιος ο Cohen δημοσίευσε λίγες εργασίες μετά το Forcing, αλλά τιμήθηκε με το Fields Medal το 1966.
- Μέχρι σήμερα παραμένει ο μοναδικός Μαθηματικός που έχει τιμηθεί με το Fields Medal για τη δουλειά του στο πεδίο της Μαθηματικής Λογικής.
- Έκτοτε η μέθοδος του Forcing έχει χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη μίας πληθώρας αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας. Η μέθοδος πλέον διδάσκεται σε όλους τους μεταπτυχιακούς φοιτητές που σπουδάζουν Συνολοθεωρία (και όχι μόνο).

Αξιωματική Θεμελίωση των Μαθηματικών

- Όλοι οι κλάδοι των Μαθηματικών βασίζονται σε κάποιο σύνολο αξιωμάτων (που είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους).

Αξιωματική Θεμελίωση των Μαθηματικών

- Όλοι οι κλάδοι των Μαθηματικών βασίζονται σε κάποιο σύνολο αξιωμάτων (που είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους).
- Όλα τα θεωρήματα απορρέουν από τα αξιώματα με τη βοήθεια των *κανόνων συμπερασμού*.

Αξιωματική Θεμελίωση των Μαθηματικών

- Όλοι οι κλάδοι των Μαθηματικών βασίζονται σε κάποιο σύνολο αξιωμάτων (που είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους).
- Όλα τα θεωρήματα απορρέουν από τα αξιώματα με τη βοήθεια των *κανόνων συμπερασμού*.
- Εάν το σύνολο αξιωμάτων A αποδεικνύει την πρόταση σ, τότε γράφουμε $A \vdash \sigma$.

- Όλοι οι κλάδοι των Μαθηματικών βασίζονται σε κάποιο σύνολο αξιωμάτων (που είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους).
- Όλα τα θεωρήματα απορρέουν από τα αξιώματα με τη βοήθεια των *κανόνων συμπερασμού.*
- Εάν το σύνολο αξιωμάτων A αποδεικνύει την πρόταση σ, τότε γράφουμε $A \vdash \sigma$.
- Το φιλοσοφικό υπόβαθρο στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα ήταν ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο αξιωμάτων A ώστε για κάθε πρόταση σ, είτε

$$A \vdash \sigma$$

ή

$$A \vdash \neg\sigma \text{ (:άρνηση της } \sigma\text{)}$$

Αξιωματική Θεμελίωση των Μαθηματικών

- Όλοι οι κλάδοι των Μαθηματικών βασίζονται σε κάποιο σύνολο αξιωμάτων (που είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους).
- Όλα τα θεωρήματα απορρέουν από τα αξιώματα με τη βοήθεια των *κανόνων συμπερασμού*.
- Εάν το σύνολο αξιωμάτων A αποδεικνύει την πρόταση σ, τότε γράφουμε $A \vdash \sigma$.
- Το φιλοσοφικό υπόβαθρο στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα ήταν ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο αξιωμάτων A ώστε για κάθε πρόταση σ, είτε

$$A \vdash \sigma$$

ή

$$A \vdash \neg\sigma \text{ (:άρνηση της } \sigma\text{)}$$

- Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται *πλήρες*.

- Ήδη από τις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα υπήρχαν παραδείγματα προτάσεων ανεξαρτήτων των αξιωμάτων, π.χ. $5^{ο}$ αξίωμα του Ευκλείδη.

- Ήδη από τις αρχές του 19^{ou} αιώνα υπήρχαν παραδείγματα προτάσεων ανεξαρτήτων των αξιωμάτων, π.χ. 5^{o} αξίωμα του Ευκλείδη.
- Η υιοθέτηση του 5^{ou} αξιώματος του Ευκλείδη οδηγεί στην ανάπτυξη της *Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, ενώ η άρνηση του 5^{ou} αξιώματος οδηγεί στην *μη Ευκλείδεια Γεωμετρία*.

Αξιωματική Θεμελίωση των Μαθηματικών II

- Ήδη από τις αρχές του 19^{ou} αιώνα υπήρχαν παραδείγματα προτάσεων ανεξαρτήτων των αξιωμάτων, π.χ. 5^{o} αξίωμα του Ευκλείδη.
- Η υιοθέτηση του 5^{ou} αξιώματος του Ευκλείδη οδηγεί στην ανάπτυξη της *Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, ενώ η άρνηση του 5^{ou} αξιώματος οδηγεί στην *μη Ευκλείδεια Γεωμετρία*.
- Η Ε.Σ. όμως δεν φαινόταν σαν μία *προφανή* πρόταση που μπορείς να την υιοθετήσεις, αυτήν ή την άρνησή της, σαν αξίωμα.

Αξιωματική Θεμελίωση των Μαθηματικών ΙΙ

- Ήδη από τις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα υπήρχαν παραδείγματα προτάσεων ανεξαρτήτων των αξιωμάτων, π.χ. $5^{ο}$ αξίωμα του Ευκλείδη.
- Η υιοθέτηση του $5^{ου}$ αξιώματος του Ευκλείδη οδηγεί στην ανάπτυξη της *Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, ενώ η άρνηση του $5^{ου}$ αξιώματος οδηγεί στην *μη Ευκλείδεια Γεωμετρία*.
- Η Ε.Σ. όμως δεν φαινόταν σαν μία *προφανή* πρόταση που μπορείς να την υιοθετήσεις, αυτήν ή την άρνησή της, σαν αξίωμα.
- Εάν το σύνολο των αξιωμάτων της Συνολοθεωρίας ήταν πλήρες, τότε η Ε.Σ. φαινόταν σαν ένα θεώρημα που έπρεπε να αποδειχθεί ή να διαψευθεί.

Περί Λογικής

- Εάν και οι περισσότεροι μαθηματικοί δεν ασχολούνται με τα αξιώματα, όσοι ασχολούνται με ζητήματα θεμελίωσης των Μαθηματικών πρέπει να ορίσουν επακριβώς τα αξιώματα που χρησιμοποιούν.

Περί Λογικής

- Εάν και οι περισσότεροι μαθηματικοί δεν ασχολούνται με τα αξιώματα, όσοι ασχολούνται με ζητήματα θεμελίωσης των Μαθηματικών πρέπει να ορίσουν επακριβώς τα αξιώματα που χρησιμοποιούν.
- Στο αντικείμενο της Μαθηματικής Λογικής εμπίπτει και η μελέτη των αξιωματικών/αποδεικτικών συστημάτων.

Περί Λογικής

- Εάν και οι περισσότεροι μαθηματικοί δεν ασχολούνται με τα αξιώματα, όσοι ασχολούνται με ζητήματα θεμελίωσης των Μαθηματικών πρέπει να ορίσουν επακριβώς τα αξιώματα που χρησιμοποιούν.
- Στο αντικείμενο της Μαθηματικής Λογικής εμπίπτει και η μελέτη των αξιωματικών/αποδεικτικών συστημάτων.
- Η μελέτη όμως αυτή πρέπει να γίνει και αυτή μέσα σε ένα (ευρύτερο) αξιωματικό/αποδεικτικό πλαίσιο.

Περί Λογικής

- Εάν και οι περισσότεροι μαθηματικοί δεν ασχολούνται με τα αξιώματα, όσοι ασχολούνται με ζητήματα θεμελίωσης των Μαθηματικών πρέπει να ορίσουν επακριβώς τα αξιώματα που χρησιμοποιούν.
- Στο αντικείμενο της Μαθηματικής Λογικής εμπίπτει και η μελέτη των αξιωματικών/αποδεικτικών συστημάτων.
- Η μελέτη όμως αυτή πρέπει να γίνει και αυτή μέσα σε ένα (ευρύτερο) αξιωματικό/αποδεικτικό πλαίσιο.
- Π.χ. θέλουμε να μελετήσουμε τα αξιώματα της Αριθμήτικής του Peano (PA). Πραγματοποιούμε αυτή τη μελέτη μέσα στο πλαίσιο των αξιωμάτων της Θεωρίας Συνόλων (ZFC).

Περί Λογικής

- Εάν και οι περισσότεροι μαθηματικοί δεν ασχολούνται με τα αξιώματα, όσοι ασχολούνται με ζητήματα θεμελίωσης των Μαθηματικών πρέπει να ορίσουν επακριβώς τα αξιώματα που χρησιμοποιούν.
- Στο αντικείμενο της Μαθηματικής Λογικής εμπίπτει και η μελέτη των αξιωματικών/αποδεικτικών συστημάτων.
- Η μελέτη όμως αυτή πρέπει να γίνει και αυτή μέσα σε ένα (ευρύτερο) αξιωματικό/αποδεικτικό πλαίσιο.
- Π.χ. θέλουμε να μελετήσουμε τα αξιώματα της Αριθμήτικής του Peano (PA). Πραγματοποιούμε αυτή τη μελέτη μέσα στο πλαίσιο των αξιωμάτων της Θεωρίας Συνόλων (ZFC).
- Για να ξεχωρίσουμε τις δύο θεωρίες αναφερόμαστε στη Θεωρία Συνόλων σαν τη *μεταθεωρία*.

Μεταθεωρία

Συνήθως η μεταθεωρία είναι πολύ ευρύτερη της θεωρίας.

Μεταθεωρία

Συνήθως η μεταθεωρία είναι πολύ ευρύτερη της θεωρίας.

(Πολύ Σημαντική) Ερώτηση: Τι γίνεται όμως όταν η μεταθεωρία είναι ακριβώς ίδια με τη θεωρία; Γίνεται αυτό;

Μεταθεωρία

Συνήθως η μεταθεωρία είναι πολύ ευρύτερη της θεωρίας.

(Πολύ Σημαντική) Ερώτηση: Τι γίνεται όμως όταν η μεταθεωρία είναι ακριβώς ίδια με τη θεωρία; Γίνεται αυτό;

- Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της *αριθμητικοποίησης* γύρω στο 1931 ο Gödel έδωσε καταφατική απάντηση στην παραπάνω ερώτηση.

Μεταθεωρία

Συνήθως η μεταθεωρία είναι πολύ ευρύτερη της θεωρίας.

(Πολύ Σημαντική) Ερώτηση: Τι γίνεται όμως όταν η μεταθεωρία είναι ακριβώς ίδια με τη θεωρία; Γίνεται αυτό;

- Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της *αριθμητικοποίησης* γύρω στο 1931 ο Gödel έδωσε καταφατική απάντηση στην παραπάνω ερώτηση.
- Κωδικοποιώντας το συνακτικό μπορούμε να «μεταφράσουμε» ιδιότητες της PA (σαν αποδεικτικό σύστημα) σε ιδιότητες συναρτήσεων πάνω στους φυσικούς αριθμούς.

Μεταθεωρία

Συνήθως η μεταθεωρία είναι πολύ ευρύτερη της θεωρίας.

(Πολύ Σημαντική) Ερώτηση: Τι γίνεται όμως όταν η μεταθεωρία είναι ακριβώς ίδια με τη θεωρία; Γίνεται αυτό;

- Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της *αριθμητικοποίησης* γύρω στο 1931 ο Gödel έδωσε καταφατική απάντηση στην παραπάνω ερώτηση.
- Κωδικοποιώντας το συνακτικό μπορούμε να «μεταφράσουμε» ιδιότητες της PA (σαν αποδεικτικό σύστημα) σε ιδιότητες συναρτήσεων πάνω στους φυσικούς αριθμούς.
- Η PA μπορεί να αποφανθεί για μερικές από τις ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων. Οπότε αποκωδικοποιώντας ερχόμαστε στο σημείο που η PA αποδεικνύει θεωρήματα για τον ίδιο της τον εαυτό.

Μη Πληρότητα της PA

Χρησιμοποιώντας αυτές τις ιδέες ο Gödel απέδειξε το εξής θεώρημα.

Μη Πληρότητα της PA

Χρησιμοποιώντας αυτές τις ιδέες ο Gödel απέδειξε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα Είτε η PA είναι ασυνεπής (οι ασυνεπείς θεωρίες αποδεικνύουν οτι $0 = 1$ και κάθε άλλη αντίφαση έπεται), είτε η PA δεν είναι πλήρης (δηλαδή υπάρχουν προτάσεις που η PA ούτε τις αποδεικνύει ούτε αποδεικνύει την άρνησή τους).

Μη Πληρότητα της PA

Χρησιμοποιώντας αυτές τις ιδέες ο Gödel απέδειξε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα Είτε η PA είναι ασυνεπής (οι ασυνεπείς θεωρίες αποδεικνύουν οτι $0 = 1$ και κάθε άλλη αντίφαση έπεται), είτε η PA δεν είναι πλήρης (δηλαδή υπάρχουν προτάσεις που η PA ούτε τις αποδεικνύει ούτε αποδεικνύει την άρνησή τους).

Μία από αυτές τις ανεξάρτητες προτάσεις είναι και η συνέπεια της ίδιας της PA (Con(PA)) καταλλήλως κωδικοποιημένη σαν μία ιδιότητα των φυσικών αριθμών. Δηλαδή $PA \nvdash Con(PA)$.

Μη Πληρότητα της ZFC

Πόρισμα

- $ZFC \nvdash Con(ZFC)$, δηλαδή η Θεωρία Συνόλων δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη μοντέλων του εαυτού της (πόσο μάλλον μοντέλων της ZFC συν την Ε.Σ.).

Μη Πληρότητα της ZFC

Πόρισμα

- $ZFC \nvdash Con(ZFC)$, δηλαδή η Θεωρία Συνόλων δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη μοντέλων του εαυτού της (πόσο μάλλον μοντέλων της ZFC συν την Ε.Σ.).
- Οπότε για να αποδείξουμε ή να διαψεύσουμε την Ε.Σ. πρέπει η μεταθεωρία μας είναι γενικότερη της ZFC.

Μη Πληρότητα της ZFC

Πόρισμα

- $ZFC \nvdash Con(ZFC)$, δηλαδή η Θεωρία Συνόλων δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη μοντέλων του εαυτού της (πόσο μάλλον μοντέλων της ZFC συν την Ε.Σ.).
- Οπότε για να αποδείξουμε ή να διαψεύσουμε την Ε.Σ. πρέπει η μεταθεωρία μας είναι γενικότερη της ZFC.

Από εδώ και στο εξής θέτουμε τη μεταθεωρία μας να είναι η ZFC+Conf(ZFC).

Συλλογισμός:

- Con(ZFC) συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα μοντέλο της ZFC.

Συλλογισμός:

- Con(ZFC) συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα μοντέλο της ZFC.
- Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Löwenheim-Skolem-Tarski, υπάρχει ένα *αριθμήσιμο* μοντέλο M της ZFC (δηλαδή ένα μοντέλο που έχει τόσα στοιχεία όσα και οι φυσικοί αριθμοί!).

Συλλογισμός:

- Con(ZFC) συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα μοντέλο της ZFC.
- Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Löwenheim-Skolem-Tarski, υπάρχει ένα *αριθμήσιμο* μοντέλο M της ZFC (δηλαδή ένα μοντέλο που έχει τόσα στοιχεία όσα και οι φυσικοί αριθμοί!).
- Από τη σκοπιά της μεταθεωρίας όλα τα στοιχεία του M είναι αριθμήσιμα. Από τη σκοπιά του M, υπάρχουν στοιχεία που δεν είναι αριθμήσιμα.

Συλλογισμός:

- Con(ZFC) συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα μοντέλο της ZFC.
- Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Löwenheim-Skolem-Tarski, υπάρχει ένα *αριθμήσιμο* μοντέλο M της ZFC (δηλαδή ένα μοντέλο που έχει τόσα στοιχεία όσα και οι φυσικοί αριθμοί!).
- Από τη σκοπιά της μεταθεωρίας όλα τα στοιχεία του M είναι αριθμήσιμα. Από τη σκοπιά του M, υπάρχουν στοιχεία που δεν είναι αριθμήσιμα.
- ***Συμπέρασμα***: Δύο μοντέλα της Θεωρίας Συνόλων μπορεί να διαφωνούν για το εάν σύνολο είναι αριθμήσιμο ή όχι.

Απόλυτες Έννοιες

Ορισμός Μία έννοια λέγεται ***απόλυτη*** εάν όλα τα μοντέλα της Θεωρίας Συνόλων συμφωνούν για αυτή.

Απόλυτες Έννοιες

Ορισμός Μία έννοια λέγεται ***απόλυτη*** εάν όλα τα μοντέλα της Θεωρίας Συνόλων συμφωνούν για αυτή.

Πόρισμα Το εάν ένα σύνολο έχει πληθικότητα $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ δεν είναι απόλυτη έννοια.

Απόλυτες Έννοιες

Ορισμός Μία έννοια λέγεται ***απόλυτη*** εάν όλα τα μοντέλα της Θεωρίας Συνόλων συμφωνούν για αυτή.

Πόρισμα Το εάν ένα σύνολο έχει πληθικότητα $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ δεν είναι απόλυτη έννοια.

Γράφουμε $\aleph_0^M, \aleph_1^M, \aleph_2^M, \ldots$ για να δηλώσουμε τον αντίστοιχο πληθικό αριθμό όπως αυτός υπολογίζεται στο M.

Ορισμός

1. Ένα σύνολο P με μία διμελή σχέση $\leq$ αποτελούν μία *μερική διάταξη* εάν η $\leq$ είναι
   1. μεταβατική ($a \leq b$ και $b \leq c \Rightarrow a \leq c$)
   2. αυτοπαθής ($a \leq a$) και
   3. (αντι)συμμετρική ($a \leq b$ και $b \leq a \Rightarrow a = b$)

Τα Βασικά Στοιχεία του Forcing

Ορισμός

1. Ένα σύνολο P με μία διμελή σχέση $\leq$ αποτελούν μία *μερική διάταξη* εάν η $\leq$ είναι
   1. μεταβατική ($a \leq b$ και $b \leq c \Rightarrow a \leq c$)
   2. αυτοπαθής ($a \leq a$) και
   3. (αντι)συμμετρική ($a \leq b$ και $b \leq a \Rightarrow a = b$)
2. Ένα υποσύνολο $F \subset P$ λέγεται *φίλτρο*, εάν
   1. $p \in F$ και $p \leq q \Rightarrow p \in F$ και
   2. για όλα τα $p, q \in F$ υπάρχει $r \in F$, $r \leq p, q$.

Ορισμός

1. Ένα σύνολο P με μία διμελή σχέση $\leq$ αποτελούν μία *μερική διάταξη* εάν η $\leq$ είναι
   1. μεταβατική ($a \leq b$ και $b \leq c \Rightarrow a \leq c$)
   2. αυτοπαθής ($a \leq a$) και
   3. (αντι)συμμετρική ($a \leq b$ και $b \leq a \Rightarrow a = b$)
2. Ένα υποσύνολο $F \subset P$ λέγεται *φίλτρο*, εάν
   1. $p \in F$ και $p \leq q \Rightarrow p \in F$ και
   2. για όλα τα $p, q \in F$ υπάρχει $r \in F$, $r \leq p, q$.
3. Ένα υποσύνολο $D \subset P$ είναι *πυκνό* εάν για όλα τα $p \in P$ υπάρχει $q \in D$, $q \leq p$.

Ορισμός

1. Ένα σύνολο P με μία διμελή σχέση $\leq$ αποτελούν μία *μερική διάταξη* εάν η $\leq$ είναι
   1. μεταβατική ($a \leq b$ και $b \leq c \Rightarrow a \leq c$)
   2. αυτοπαθής ($a \leq a$) και
   3. (αντι)συμμετρική ($a \leq b$ και $b \leq a \Rightarrow a = b$)
2. Ένα υποσύνολο $F \subset P$ λέγεται *φίλτρο*, εάν
   1. $p \in F$ και $p \leq q \Rightarrow p \in F$ και
   2. για όλα τα $p, q \in F$ υπάρχει $r \in F$, $r \leq p, q$.
3. Ένα υποσύνολο $D \subset P$ είναι *πυκνό* εάν για όλα τα $p \in P$ υπάρχει $q \in D$, $q \leq p$.
4. Ένα φίλτρο λέγεται *γένιο* (generic) εάν τέμνει όλα τα πυκνά υποσύνολα του P.

Λήμμα [Rasiowa–Sikorski] Έστω $(P, \leq)$ μία μερική διάταξη και D μία *αριθμήσιμη* συλλογή πυκνών υποσυνόλων του P. Τότε υπάρχει ένα φίλτρο F που τέμνει όλα τα πυκνά σύνολα του D.

Τα Βασικά Στοιχεία του Forcing II

Λήμμα [Rasiowa–Sikorski] Έστω $(P, \leq)$ μία μερική διάταξη και D μία *αριθμήσιμη* συλλογή πυκνών υποσυνόλων του P. Τότε υπάρχει ένα φίλτρο F που τέμνει όλα τα πυκνά σύνολα του D.

Εφαρμογή

- Έστω M ένα αριθμήσιμο μοντέλο της Θεωρίας Συνόλων και $(P, \leq)$ μία μερική διάταξη που ανήκει στο M.

Τα Βασικά Στοιχεία του Forcing II

Λήμμα [Rasiowa–Sikorski] Έστω $(P, \leq)$ μία μερική διάταξη και D μία *αριθμήσιμη* συλλογή πυκνών υποσυνόλων του P. Τότε υπάρχει ένα φίλτρο F που τέμνει όλα τα πυκνά σύνολα του D.

Εφαρμογή

- Έστω M ένα αριθμήσιμο μοντέλο της Θεωρίας Συνόλων και $(P, \leq)$ μία μερική διάταξη που ανήκει στο M.
- Υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα πυκνά υποσύνολα του P που ανήκουν στο M.

Λήμμα [Rasiowa–Sikorski] Έστω $(P, \leq)$ μία μερική διάταξη και D μία *αριθμήσιμη* συλλογή πυκνών υποσυνόλων του P. Τότε υπάρχει ένα φίλτρο F που τέμνει όλα τα πυκνά σύνολα του D.

Εφαρμογή

- Έστω M ένα αριθμήσιμο μοντέλο της Θεωρίας Συνόλων και $(P, \leq)$ μία μερική διάταξη που ανήκει στο M.
- Υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα πυκνά υποσύνολα του P που ανήκουν στο M.
- Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει ένα γένιο φίλτρο G του P που τέμνει όλα αυτά τα πυκνά υποσύνολα.

Τα Βασικά Στοιχεία του Forcing II

Λήμμα [Rasiowa–Sikorski] Έστω $(P, \leq)$ μία μερική διάταξη και D μία *αριθμήσιμη* συλλογή πυκνών υποσυνόλων του P. Τότε υπάρχει ένα φίλτρο F που τέμνει όλα τα πυκνά σύνολα του D.

Εφαρμογή

- Έστω M ένα αριθμήσιμο μοντέλο της Θεωρίας Συνόλων και $(P, \leq)$ μία μερική διάταξη που ανήκει στο M.
- Υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα πυκνά υποσύνολα του P που ανήκουν στο M.
- Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει ένα γένιο φίλτρο G του P που τέμνει όλα αυτά τα πυκνά υποσύνολα.
- Το G συνήθως δεν ανήκει στο M.

Το Θεώρημα του Cohen

Θεώρημα [Cohen] (Δουλεύοντας στη μεταθεωρία:)
Υπάρχει ένα μοντέλο της Θεωρίας Συνόλων $M[G]$ που ικανοποιεί (μεταξύ άλλων)

1. $M \subset M[G]$
2. $G \in M[G]$

Παράδειγμα

- Έστω $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$ το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα *πεπερασμένο* υποσύνολο του $\aleph_2 \times \mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $2 = \{0, 1\}$.

Παράδειγμα

- Έστω $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$ το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα *πεπερασμένο* υποσύνολο του $\aleph_2 \times \mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $2 = \{0, 1\}$.
- Εάν $p, q \in Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$, ορίζουμε $p \leq q$, εάν $p \supset q$ (μικρότερο στοιχείο σημαίνει *μεγαλύτερο* πεδίο ορισμού!)

Λήμμα

1. Για κάθε $\alpha \in \aleph_2, n \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$D_{\alpha,n} = \{p \in Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2) | (\alpha, n) \in dom(p)\}$$

είναι πυκνό.

Λήμμα

1. Για κάθε $\alpha \in \aleph_2, n \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$D_{\alpha,n} = \{p \in Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2) | (\alpha, n) \in dom(p)\}$$

είναι πυκνό.

2. Για κάθε $\alpha \neq \beta \in \aleph_2$, το σύνολο

$$D_{\alpha,\beta} = \{p \in Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2) | \exists n \; p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}$$

είναι πυκνό.

Πόρισμα Έστω G ένα γένιο φίλτρο του $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$.

1. Για κάθε $\alpha \in \aleph_2$, $G_\alpha := \{(\alpha, n, G(\alpha, n)) | n \in \mathbb{N}\}$ είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $2 = \{0, 1\}$.

Πόρισμα Έστω G ένα γένιο φίλτρο του $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$.

a. Για κάθε $\alpha \in \aleph_2$, $G_\alpha := \{(\alpha, n, G(\alpha, n)) | n \in \mathbb{N}\}$ είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $2 = \{0, 1\}$.

b. Για κάθε $\alpha \neq \beta \in \aleph_2$, $G_\alpha \neq G_\beta$.

Πόρισμα Έστω G ένα γένιο φίλτρο του $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$.

(a) Για κάθε $\alpha \in \aleph_2$, $G_\alpha := \{(\alpha, n, G(\alpha, n)) | n \in \mathbb{N}\}$ είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $2 = \{0, 1\}$.

(b) Για κάθε $\alpha \neq \beta \in \aleph_2$, $G_\alpha \neq G_\beta$.

(c) Στο $M[G]$ υπάρχουν τουλάχιστον $\aleph_2$ συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to 2$.

Πόρισμα Έστω G ένα γένιο φίλτρο του $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$.

a. Για κάθε $\alpha \in \aleph_2$, $G_\alpha := \{(\alpha, n, G(\alpha, n)) | n \in \mathbb{N}\}$ είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $2 = \{0, 1\}$.
b. Για κάθε $\alpha \neq \beta \in \aleph_2$, $G_\alpha \neq G_\beta$.
c. Στο $M[G]$ υπάρχουν τουλάχιστον $\aleph_2$ συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to 2$.

Άρα

$$M[G] \vdash |\mathbb{R}| = |\{f | f : \mathbb{N} \to 2\}| \geq \aleph_2.$$

Πόρισμα Έστω G ένα γένιο φίλτρο του $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$.

a. Για κάθε $\alpha \in \aleph_2$, $G_\alpha := \{(\alpha, n, G(\alpha, n)) | n \in \mathbb{N}\}$ είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $2 = \{0, 1\}$.
b. Για κάθε $\alpha \neq \beta \in \aleph_2$, $G_\alpha \neq G_\beta$.
c. Στο $M[G]$ υπάρχουν τουλάχιστον $\aleph_2$ συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to 2$.

Άρα

$$M[G] \vdash |\mathbb{R}| = |\{f | f : \mathbb{N} \to 2\}| \geq \aleph_2.$$

Οπότε το $M[G]$ είναι ένα μοντέλο της ZFC συν την άρνηση της Ε.Σ.!!

Λάθος!

Λάθος!

⚠ Ο παραπάνω συλλογισμός περιέχει κάποιο *μικρό* λάθος.

Λάθος!

⚠ Ο παραπάνω συλλογισμός περιέχει κάποιο *μικρό* λάθος.

- Το πρόβλημα είναι ότι η ποσότητα $\aleph_2$ δεν είναι απόλυτη.

Λάθος!

⚠ Ο παραπάνω συλλογισμός περιέχει κάποιο *μικρό* λάθος.

- Το πρόβλημα είναι ότι η ποσότητα $\aleph_2$ δεν είναι απόλυτη.
- Ο ορισμός του $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$ γίνεται μέσα στο M. Πιο σωστά θα έπρεπε να γράφαμε $Fn(\aleph_2^M \times \mathbb{N}, 2)$.

Λάθος!

⚠ Ο παραπάνω συλλογισμός περιέχει κάποιο *μικρό* λάθος.

- Το πρόβλημα είναι ότι η ποσότητα $\aleph_2$ δεν είναι απόλυτη.
- Ο ορισμός του $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$ γίνεται μέσα στο M. Πιο σωστά θα έπρεπε να γράφαμε $Fn(\aleph_2^M \times \mathbb{N}, 2)$.
- Οπότε το μόνο που καταφέραμε είναι να αποδείξουμε ότι

$$M[G] \vdash |\mathbb{R}| \geq \aleph_2^M.$$

Λάθος!

⚠ Ο παραπάνω συλλογισμός περιέχει κάποιο *μικρό* λάθος.

- Το πρόβλημα είναι ότι η ποσότητα $\aleph_2$ δεν είναι απόλυτη.
- Ο ορισμός του $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$ γίνεται μέσα στο M. Πιο σωστά θα έπρεπε να γράφαμε $Fn(\aleph_2^M \times \mathbb{N}, 2)$.
- Οπότε το μόνο που καταφέραμε είναι να αποδείξουμε ότι

$$M[G] \vdash |\mathbb{R}| \geq \aleph_2^M.$$

- Θέλουμε όμως

$$M[G] \vdash |\mathbb{R}| \geq \aleph_2^{M[G]}.$$

CCC

Θεώρημα [Cohen] Εάν η μερική διάταξη $(P, \leq)$ ικανοποιεί την *συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας* (countable chain condition, ccc) και G είναι ένα γένιο φίλτρο του P, τότε για κάθε πληθικό αριθμό

$$\aleph_\alpha^M = \aleph_\alpha^{M[G]}.$$

CCC

Θεώρημα [Cohen] Εάν η μερική διάταξη $(P, \leq)$ ικανοποιεί την *συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας* (countable chain condition, ccc) και G είναι ένα γένιο φίλτρο του P, τότε για κάθε πληθικό αριθμό

$$\aleph_\alpha^M = \aleph_\alpha^{M[G]}.$$

Πόρισμα Εάν το $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$ ικανοποιεί τη συνθήκη αριθμήσιμης

αλυσίδας, τότε $M[G] \vdash |\mathbb{R}| \geq \aleph_2^M = \aleph_2^{M[G]}$ και πράγματι έχουμε ένα μοντέλο της άρνησης της Ε.Σ.

Ορισμός

1. Δύο στοιχεία $p, q \in P$ είναι *ασυμβίβαστα* (incompatible) εάν δεν υπάρχει $r \in P,\ r \leq p, q$.

Ορισμός

1. Δύο στοιχεία $p, q \in P$ είναι *ασυμβίβαστα* (incompatible) εάν δεν υπάρχει $r \in P,\ r \leq p, q$.

   Για παράδειγμα, εάν $p = \{(\alpha, n, 0)\}$ και $q = \{(\alpha, n, 1)\}$, τότε τα p, q είναι ασυμβίβαστα.

Ορισμός

1. Δύο στοιχεία $p, q \in P$ είναι *ασυμβίβαστα* (incompatible) εάν δεν υπάρχει $r \in P,\ r \leq p, q$.

   Για παράδειγμα, εάν $p = \{(\alpha, n, 0)\}$ και $q = \{(\alpha, n, 1)\}$, τότε τα p, q είναι ασυμβίβαστα.

2. Εάν υποσύνολο $A \subset P$ λέγεται *αντιαλυσίδα* (antichain) εάν για κάθε $p, q \in A$, τα p, q είναι ασυμβίβαστα.

Ορισμός

1. Δύο στοιχεία $p, q \in P$ είναι *ασυμβίβαστα* (incompatible) εάν δεν υπάρχει $r \in P,\ r \leq p, q$.

   Για παράδειγμα, εάν $p = \{(\alpha, n, 0)\}$ και $q = \{(\alpha, n, 1)\}$, τότε τα p, q είναι ασυμβίβαστα.
2. Εάν υποσύνολο $A \subset P$ λέγεται *αντιαλυσίδα* (antichain) εάν για κάθε $p, q \in A$, τα p, q είναι ασυμβίβαστα.
3. Η $(P, \leq)$ ικανοποιεί την συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας, εάν κάθε αντιαλυσίδα είναι αριθμήσιμη.

Ορισμός

1. Δύο στοιχεία $p, q \in P$ είναι *ασυμβίβαστα* (incompatible) εάν δεν υπάρχει $r \in P,\ r \leq p, q$.

   Για παράδειγμα, εάν $p = \{(\alpha, n, 0)\}$ και $q = \{(\alpha, n, 1)\}$, τότε τα p, q είναι ασυμβίβαστα.
2. Εάν υποσύνολο $A \subset P$ λέγεται *αντιαλυσίδα* (antichain) εάν για κάθε $p, q \in A$, τα p, q είναι ασυμβίβαστα.
3. Η $(P, \leq)$ ικανοποιεί την συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας, εάν κάθε αντιαλυσίδα είναι αριθμήσιμη.

Λήμμα [Cohen] Η μερική διάταξη $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$ ικανοποιεί τη συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας.

Ορισμός

1. Δύο στοιχεία $p, q \in P$ είναι *ασυμβίβαστα* (incompatible) εάν δεν υπάρχει $r \in P,\ r \leq p, q$.

   Για παράδειγμα, εάν $p = \{(\alpha, n, 0)\}$ και $q = \{(\alpha, n, 1)\}$, τότε τα p, q είναι ασυμβίβαστα.
2. Εάν υποσύνολο $A \subset P$ λέγεται *αντιαλυσίδα* (antichain) εάν για κάθε $p, q \in A$, τα p, q είναι ασυμβίβαστα.
3. Η $(P, \leq)$ ικανοποιεί την συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας, εάν κάθε αντιαλυσίδα είναι αριθμήσιμη.

Λήμμα [Cohen] Η μερική διάταξη $Fn(\aleph_2 \times \mathbb{N}, 2)$ ικανοποιεί τη συνθήκη αριθμήσιμης αλυσίδας.

Οπότε το θεώρημα έπεται.

Easton

Λίγο αργότερα από τον Cohen, ο Easton χρησιμοποίησε τη μέθοδο του Forcing γιαν να αποδείξει το εξής Θεώρημα

Easton

Λίγο αργότερα από τον Cohen, ο Easton χρησιμοποίησε τη μέθοδο του Forcing γιαν να αποδείξει το εξής Θεώρημα

Θεώρημα Έστω $\aleph_\alpha$ ένα πληθικός αριθμός με ομοτελικότητα $cf(\aleph_\alpha) > \aleph_0$. Τότε υπάρχει ένα μοντέλο

$$M[G] \vdash |\mathbb{R}| = \aleph_\alpha .$$

Easton

Λίγο αργότερα από τον Cohen, ο Easton χρησιμοποίησε τη μέθοδο του Forcing γιαν να αποδείξει το εξής Θεώρημα

Θεώρημα Έστω $\aleph_\alpha$ ένα πληθικός αριθμός με ομοτελικότητα $cf(\aleph_\alpha) > \aleph_0$. Τότε υπάρχει ένα μοντέλο

$$M[G] \vdash |\mathbb{R}| = \aleph_\alpha.$$

Πόρισμα Το $|\mathbb{R}|$ μπορεί να ισούται με $\aleph_n$, $n \in \mathbb{N}$, ή $\aleph_{\omega_1}$, αλλά δεν μπορεί

να ισούται με το $\aleph_\omega$.

Φιλοσοφικές Διαμάχες

Παρόλο που η Ε.Σ. έχει αποδειχθεί ανεξάρτητη από τη αξιώματα της ZFC, υπάρχει ακόμα μία φιλοσοφική διαμάχη γύρω της.

Φιλοσοφικές Διαμάχες

Παρόλο που η Ε.Σ. έχει αποδειχθεί ανεξάρτητη από τη αξιώματα της ZFC, υπάρχει ακόμα μία φιλοσοφική διαμάχη γύρω της.

Θέση #1 Υπάρχει κάποιο (άγνωστο ακόμα) καινούργιο αξίωμα το οποίο θα είναι «προφανές» σαν τα υπόλοιπα αξιώματα της ZFC και το οποίο θα μπορέσει να αποφασίσει την Ε.Σ.

Φιλοσοφικές Διαμάχες

Παρόλο που η Ε.Σ. έχει αποδειχθεί ανεξάρτητη από τη αξιώματα της ZFC, υπάρχει ακόμα μία φιλοσοφική διαμάχη γύρω της.
Θέση #1 Υπάρχει κάποιο (άγνωστο ακόμα) καινούργιο αξίωμα το οποίο θα είναι «προφανές» σαν τα υπόλοιπα αξιώματα της ZFC και το οποίο θα μπορέσει να αποφασίσει την Ε.Σ.
(Το ιστορικό ανάλογο είναι το 5^o αξίωμα του Ευκλείδη).

Φιλοσοφικές Διαμάχες

Παρόλο που η Ε.Σ. έχει αποδειχθεί ανεξάρτητη από τη αξιώματα της ZFC, υπάρχει ακόμα μία φιλοσοφική διαμάχη γύρω της.
Θέση #1 Υπάρχει κάποιο (άγνωστο ακόμα) καινούργιο αξίωμα το οποίο θα είναι «προφανές» σαν τα υπόλοιπα αξιώματα της ZFC και το οποίο θα μπορέσει να αποφασίσει την Ε.Σ.
(Το ιστορικό ανάλογο είναι το 5^o αξίωμα του Ευκλείδη).
Θέση #2 Κάποιο τέτοιο αξίωμα δεν θα υπάρξει και το μόνο που μας μένει είναι κατασκευάζουμε μοντέλα της ZFC(+καινούργια αξιώματα) στα οποία η Ε.Σ. αληθεύει ή όχι *κατά βούληση*.

- Ηλεκτρονική διεύθυνση: souldaio@udmercy.edu
- Τις διαφάνειες της ομιλίας μπορείτε να τις βρείτε στην ιστοσελίδα: `https://souldatosresearch.wordpress.com/`